Matrices semblables à leur inverse

Origine : Mines de sup 2002

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (n termes) et on convient de poser $u^0 = \mathrm{Id}$ où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

On note $M_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_3(\mathbb{R})$ et I la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.

On note aussi par 0, l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $M_3(\mathbb{R})$, on dit que la matrice A est semblable à la matrice B lorsqu'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ désignent deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$.
Par suite la matrice A est semblable à la matrice B.

Partie I

Soit A, B, C trois matrices de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est semblable à B alors B est semblable à A.
   Désormais, on pourra alors dire que les matrices A et B sont semblables.
2. Montrer que si d'une part A et B sont semblables et que d'autre part B et C le sont aussi alors A et C sont semblables.
3. Montrer que si A et B sont semblables alors elles ont même rang et même déterminant.

Partie II

Soit u un endomorphisme de E et $v = u^2 - u$.

1. Soit p, q deux entiers naturels et w l'application linéaire de $\ker u^{p+q}$ vers E définie par $w(x) = u^q(x)$.

1.a Montrer que $\mathrm{Im}\, w \subset \ker u^p$.

1.b En déduire que $\dim \ker u^{p+q} \leq \dim \ker u^p + \dim \ker u^q$.

2. Dans cette question, on suppose que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 2$.

2.a Etablir que $\dim \ker u^2 = 2$. On pourra exploiter deux fois le résultat de la question II.1.b.

2.b Justifier qu'il existe un vecteur a de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et observer que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

2.c Ecrire la matrice U de u et la matrice V de v dans cette base.

3. Dans cette question, on suppose que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 1$.

3.a Montrer que l'on peut trouver un vecteur b de E tel que $u(b) \neq 0$.

3.b Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(u(b), c, b)$ est une base de E.

3.c Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de v dans cette base.

Partie III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = N^2 - N$.

1.a Calculer N^3 et justifier que $\operatorname{rg} N \leq 2$.

1.b Justifier que A est inversible et que $A^{-1} = I_3 + M$.

2. Dans cette question, on suppose que $\operatorname{rg} N = 2$.

2.a En exploitant II.2., montrer que la matrice N est semblable à la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.b En exploitant II.2.c, dire à quelle matrice « simple » la matrice M est semblable.
En déduire M^3 et $\operatorname{rg} M$.

2.c Montrer que les matrices M et N sont semblables et conclure que A et A^{-1} le sont.

3. Dans cette question, on suppose que $\operatorname{rg} N \leq 1$. Montrer que A et A^{-1} sont encore semblables.

Correction

Partie I

1. Si A est semblable à B alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
Pour $Q = P^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$, on a $B = Q^{-1}AQ$ donc B est semblable à A.

2. Si A est semblable à B et B semblable à C alors il existe $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que :
$A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$ et donc $A = (PQ)^{-1}C(PQ)$ avec $PQ \in GL_3(\mathbb{R})$. Ainsi A et C sont semblables.

3. Si A est semblable à B alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
Or P et P^{-1} sont inversibles et on sait que le rang reste inchangé lors d'un produit par une matrice inversible donc $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} P^{-1}BP = \operatorname{rg} A$.
De plus $\det B = \det P^{-1}AP = \det P^{-1} \times \det A \times \det P$ avec $\det P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}$ et donc $\det B = \det A$.

Partie II

1.a $\forall y \in \operatorname{Im} w, \exists x \in \ker u^{p+q}$ tel que $y = w(x) = u^q(x)$.
On a alors $u^p(y) = u^{p+q}(x) = 0$ car $x \in \ker u^{p+q}$. Ainsi $y \in \ker u^q$ et donc $\operatorname{Im} w \subset \ker u^p$.

1.b Par le théorème du rang : $\dim \ker u^{p+q} = \operatorname{rg} w + \dim \ker w$.
Or $\operatorname{rg} w = \dim \operatorname{Im} w \leq \dim \ker u^p$ et $\ker w = \ker u^q \cap \ker u^{p+q} = \ker u^q$ car $\ker u^q \subset \ker u^{p+q}$
donc $\dim \ker u^{p+q} \leq \dim \ker u^p + \dim \ker u^q$.

2.a Par le théorème du rang, $\dim \ker u = 1$ et donc $\dim \ker u^2 \leq \dim \ker u + \dim \ker u = 2$.
De plus $3 = \dim \ker u^3 \leq \dim \ker u^2 + \dim \ker u = \dim \ker u^2 + 1$.
Par double inégalité : $\dim \ker u^2 = 2$.

2.b Puisque $u^2 \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $u^2(a) \neq 0$.
Supposons $\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a = 0$.
En composant cette relation avec u, on obtient : $\beta u^2(a) + \gamma u(a) = 0$ car $u^3 = 0$.
En composant à nouveau avec u, on obtient : $\gamma u^2(a) = 0$.
Sachant $u^2(a) \neq 0$, on conclut $\gamma = 0$ puis en remontant $\beta = \alpha = 0$.
La famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre et formée de $3 = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

2.c $U=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $V=U^2-U=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

3.a $\operatorname{rg} u\neq 0$ donc $\operatorname{Im} u$ n'est par réduit à $\{0\}$.
Un antécédent b d'un élément non nul de $\operatorname{Im} u$ résout notre problème.

3.b Par le théorème du rang $\dim\ker u=2$.
$u(b)\in\ker u$ car $u^2=0$ et $u(b)\neq 0$ donc, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(u(b))$ en une base de $\ker u$ de la forme $(u(b),c)$.
Supposons $\alpha u(b)+\beta c+\gamma b=0$.
En appliquant u à cette relation on obtient $\gamma u(b)=0$ donc $\gamma=0$ car $u(b)\neq 0$.
La relation initiale devient $\alpha u(b)+\beta c=0$ qui implique $\alpha=\beta=0$ car la famille $(u(b),c)$ est libre.
La famille $(u(b),c,b)$ est libre et formée de $3=\dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

3.c $U'=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $V'=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Partie III

1.a $N^3=0$. N n'est pas inversible donc $\operatorname{rg} N<3$ d'où $\operatorname{rg} N\leq 2$.

1.b $A(I_3+M)=(I+N)(I+N^2-N)=I+N+N^2+N^3-N-N^2=I$
Par le théorème d'inversibilité, A est inversible et B est son inverse.

2.a On a $N^3=0$ et $\operatorname{rg} N=2$ donc N est, moyennant l'introduction d'une base de E, la matrice d'un endomorphisme u de E tel que $u^3=0$ et $\operatorname{rg} u=2$.
Par II.2.c, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit U.
Par suite N et U sont semblables.

2.b Soit $P\in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N=P^{-1}UP$.
On a $M=N^2-N=P^{-1}UPP^{-1}UP-P^{-1}UP=P^{-1}(U^2-U)P=P^{-1}VP$.
Ainsi M est semblable à V.
On a alors $\operatorname{rg} M=\operatorname{rg} V=2$ et $M^3=P^{-1}VPP^{-1}VPP^{-1}VP=P^{-1}V^3P=P^{-1}\times 0\times P=0$.

2.c On a $M^3=0$ et $\operatorname{rg} M=2$ donc, comme ci-dessus, M est semblable à U et donc à N.
Soit $Q\in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M=Q^{-1}NQ$.
On peut écrire $A^{-1}=I_3+M=I_3+Q^{-1}NQ=Q^{-1}(I_3+N)Q=Q^{-1}AQ$ donc A^{-1} et A sont semblables.

3. Si $\operatorname{rg} N=0$ alors $N=0$, $A=I_3=A^{-1}$ et donc A et A^{-1} sont semblables via $P=I_3\in GL_3(\mathbb{R})$.
Si $\operatorname{rg} N=1$ alors $\alpha=0$ ou $\gamma=0$ mais dans les deux cas $N^2=0$.
Comme en III.2.a et en exploitant II.3.c, on peut alors affirmer que N est semblable à U'.
Par suite M est semblable à V' et donc $M^2=0$ et $\operatorname{rg} M=1$.
Ainsi M est aussi semblable à U' et donc à N.
On peut alors conclure que A et A^{-1} sont semblables.